Ecuaciones LOGARíTMiCAS

Son aquellas en la que la incógnita x aparece sometida a la operación de logaritmación. Es decir, contienen términos de la forma $\log_a x$.

El principio en el que se fundamenta la resolución de ecuaciones logarítmicas elementales es:

> *« Los logaritmos de dos expresiones positivas, de una misma base positiva y distinta de la unidad son iguales cuando, y sólo cuando, son iguales dichas expresiones ».*
>
> $$\log_a u = \log_a v \quad \Leftrightarrow \quad u = v$$

Definición de logaritmo: $\boxed{\log_a x = y \;\Leftrightarrow\; a^y = x}$

$$\forall\ a > 0 \wedge a \neq 1\ ;\ x > 0\ ;\ y \in \mathbb{R}$$

Aunque no existe un único procedimiento general para resolver ecuaciones logarítmicas, existen algunos métodos sencillos que podemos utilizar para resolverlas:

— Aplicando la definición de logaritmo
— Por igualdad de logaritmos, aplicando el principio anterior
— Aplicando las distintas propiedades de logaritmos
— Por cambio de variable
— Resolución pasando a su forma exponencial

De manera práctica, un método para resolver ecuaciones logarítmicas consiste en lograr que los dos miembros de la ecuación tengan una misma expresión logarítmica. Frecuentemente utilizaremos las propiedades de los logaritmos en orden inverso, simplificando y realizando transformaciones oportunas.

Al terminar **debemos comprobar las soluciones obtenidas** (en la ecuación original) porque pueden aparecer soluciones extrañas (no olvidar que el cero y los números negativos no tienen logaritmo y la base $a > 0$ y $a \neq 1$)

- Reduciendo ambos miembros de la ecuación a una sola expresión logarítmica

$$3\log x - \log 32 = \log\frac{x}{2}$$
$$\log x^3 - \log 32 = \log\frac{x}{2}$$
$$\log\frac{x^3}{32} = \log\frac{x}{2}$$
$$\frac{x^3}{32} = \frac{x}{2}$$

$$2x^3 = 32x$$
$$2x^3 - 32x = 0$$
$$2x\left(x^2 - 16\right) = 0$$
$$\cancel{x=0}\ ;\ \therefore\ x = 4\ ;\ \cancel{x=-4}$$

El cero y los números negativos no tienen logaritmo, por tanto, la única solución válida es $x = 4$

- Realizando transformaciones oportunas

$$1 - \log 5 = \frac{1}{3}\left(\log\frac{1}{2} + \log x + \frac{1}{3}\log 5\right)$$
$$\log 10 - \log 5 = \frac{1}{3}\left(-\log 2 + \log x + \frac{1}{3}\log 5\right)$$
$$3\log 2 = -\log 2 + \log x + \frac{1}{3}\log 5$$
$$4\log 2 - \frac{1}{3}\log 5 = \log x$$
$$\log\frac{2^4}{5^{\frac{1}{3}}} = \log x \;\Rightarrow\; \therefore\ x = \frac{16}{\sqrt[3]{5}}$$

- Empleando ecuaciones exponenciales

$$\left(x^2 - 5x + 9\right)\log 2 + \log 125 = 3$$
$$\log 2^{x^2-5x+9} = \log 1000 - \log 125$$
$$\log 2^{x^2-5x+9} = \log\frac{1000}{125}$$
$$2^{x^2-5x+9} = 8$$
$$x^2 - 5x + 9 = 3$$
$$x^2 - 5x + 6 = 0$$
$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = \begin{cases} x = 3 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$\left(x^2 - 4x + 7\right)\log 5 + \log 16 = 4$$
$$\log 5^{x^2-4x+7} = \log\frac{10000}{16}$$
$$5^{x^2-4x+7} = 625$$
$$5^{x^2-4x+7} = 5^4$$
$$x^2 - 4x + 7 = 4$$
$$x^2 - 4x + 3 = 0$$
$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \begin{cases} x = 3 \\ x = 1 \end{cases}$$

- Utilizando un cambio de variable

$$\log_5 x + \frac{\log_5 125}{\log_5 x} = \frac{7}{2}$$
$$\log_5 x = t$$
$$t + \frac{3}{t} = \frac{7}{2}$$
$$2t^2 - 7t + 6$$
$$t = \frac{7 \pm \sqrt{49-48}}{4} = \begin{cases} t = 2 \\ x = \dfrac{3}{2} \end{cases}$$
$$\log_5 x = 2 \;\rightarrow\; x = 25$$
$$\log_5 x = \frac{3}{2} \;\rightarrow\; x = 5\sqrt{5}$$

$$\log x = \frac{2 - \log x}{\log x}$$
$$\log x = t$$
$$t = \frac{2-t}{t}$$
$$t^2 + t - 2 = 0$$
$$t = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \begin{cases} t = 1 \\ x = -2 \end{cases}$$
$$\log x = 1 \;\rightarrow\; x = 10$$
$$\log x = -2 \;\rightarrow\; x = \frac{1}{100}$$

- Utilizando la definición de logaritmo

$$\log_x 5 = -\frac{1}{2}$$
$$x^{-\frac{1}{2}} = 5$$
$$\frac{1}{\sqrt{x}} = 5$$
$$\therefore\ x = \frac{1}{25}$$

$$\log_7 \frac{1}{x} = -3$$
$$7^{-3} = \frac{1}{x}$$
$$x = \frac{1}{7^{-3}}$$
$$\therefore\ x = 343$$

$$\log_x \frac{1}{100} = -2$$
$$x^{-2} = \frac{1}{100}$$
$$\frac{1}{x^2} = \frac{1}{100}$$
$$x^2 = 100$$
$$\therefore\ x = 10$$

$$\log_{\frac{1}{3}} x = -0.5$$
$$\left(\frac{1}{3}\right)^{-0.5} = x$$
$$x = 3^{0.5}$$
$$\therefore\ x = \sqrt{3}$$

SISTEMA DE ECUACIONES LOGARITMICAS

Un **sistema de ecuaciones logarítmicas** está formado por varias ecuaciones logarítmicas. Se resuelven como los sistemas ordinarios pero utilizando los métodos antes dichos para las ecuaciones logarítmicas.

Ejemplo

$$\begin{cases} 2\log x - 3\log y = 7 \\ \log x + \log y = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \log\dfrac{x^2}{y^3} = \log 10^7 \\ \log\left(x \cdot y\right) = \log 10 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 = 10^7 y^3 \\ x = \dfrac{10}{y} \end{cases}$$

$$\left(\frac{10}{y}\right)^2 = 10^7 y^3 \rightarrow 100 = 10^7 y^5 \;\rightarrow\; \boxed{y = \frac{1}{10}}\ ;\ \boxed{x = 100}$$

Nota: *en la mayoría de los logaritmos no se especifica la base porque presuponemos que es 10, aunque es conveniente saber que en la mayoría de los textos científicos se considera, si no se indica lo contrario y se omite la base, que la base es e (es decir, logaritmo neperiano o natural) aunque se siga escribiendo* $\log$ *en lugar de* $\ln$.